

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

`zakh@cs.msu.su`

<http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html>

Лекция 5.

Полнота табличного вывода.

Теорема Левенгейма-Сколема.

Теорема компактности Мальцева.

Автоматическое доказательство
теорем.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Теорема полноты табличного вывода

Если семантическая таблица T_0 невыполнима, то для T_0 существует успешный табличный вывод.

Доказательство.

Проведем для упрощенного частного случая таблицы T_0 , в которой

- ▶ имеется лишь конечное число формул,
- ▶ все формулы замкнутые,
- ▶ в формулах нет функциональных символов.

Пусть $T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$ — невыполнимая таблица. Будем строить табличный вывод для T_0 , руководствуясь следующей стратегией.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.

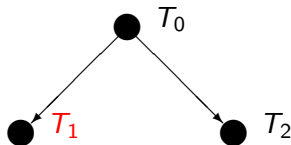
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



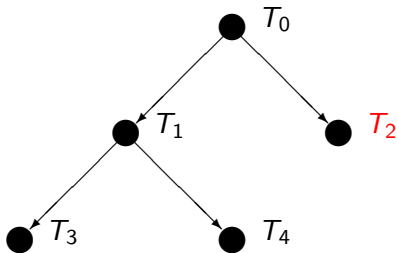
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



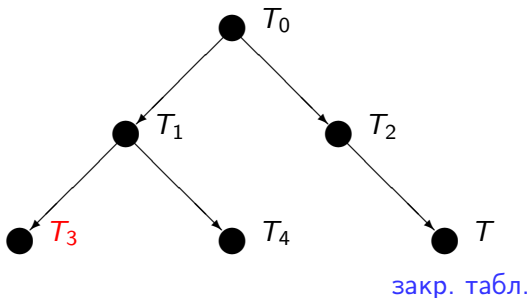
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



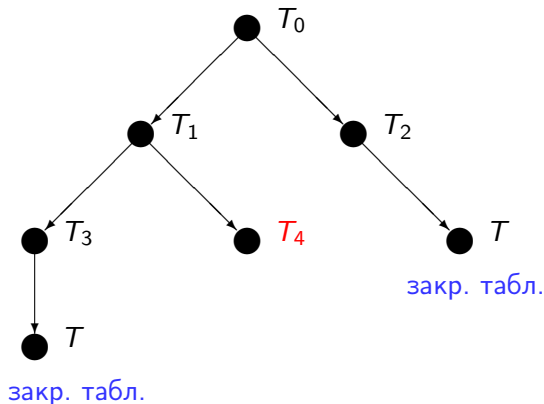
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



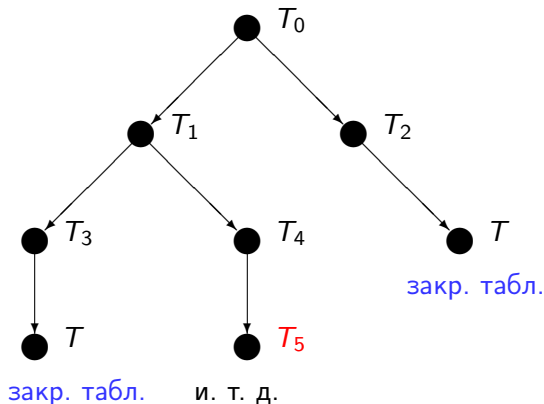
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle \forall x \varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle \forall x \varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$\begin{array}{c} T_0 = \langle \forall x \varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \\ \downarrow (L\forall) \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x \varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \end{array}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$\begin{array}{c} T_0 = \langle \forall x\varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \\ \downarrow (L\forall) \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \end{array}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$\begin{array}{c} T_0 = \langle \forall x\varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \\ \downarrow (L\forall) \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \\ \downarrow (RV) \\ T_2 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \Delta, \chi_1, \chi_2 \rangle \end{array}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle \forall x\varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle$$

$\downarrow$
(L $\forall$)

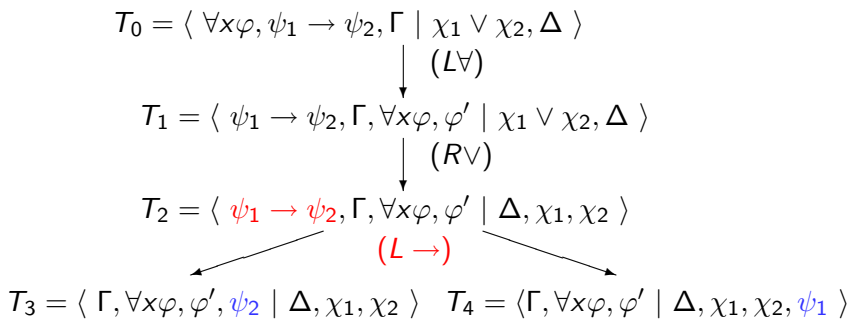
$$T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle$$

$\downarrow$
(R $\vee$)

$$T_2 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \Delta, \chi_1, \chi_2 \rangle$$

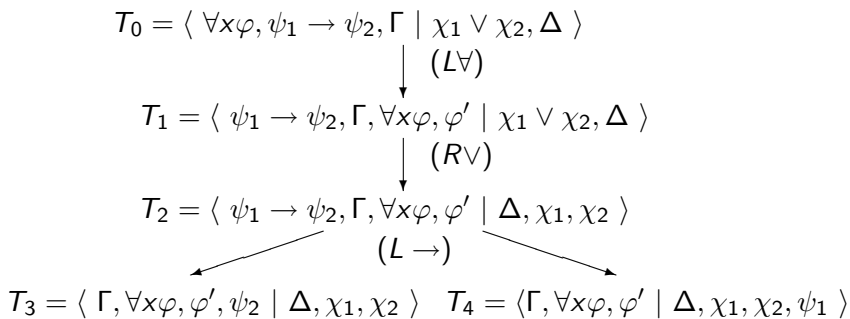
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c', c''\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c', c''\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$\begin{array}{ccc} T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_0 = \{c', c''\} \\ \downarrow (L\exists) & \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_1 = \{c', c'', c_1\} \end{array}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$\begin{array}{ccc} T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_0 = \{c', c''\} \\ \downarrow (L\exists) & \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_1 = \{c', c'', c_1\} \end{array}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$\begin{array}{ccc} T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_0 = \{c', c''\} & \\ \downarrow (L\exists) & & \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_1 = \{c', c'', c_1\} & \\ \downarrow (R\forall) & & \\ T_2 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \Delta, \chi(c_2) \rangle, & L_2 = \{c', c'', c_1, c_2\} & \end{array}$$

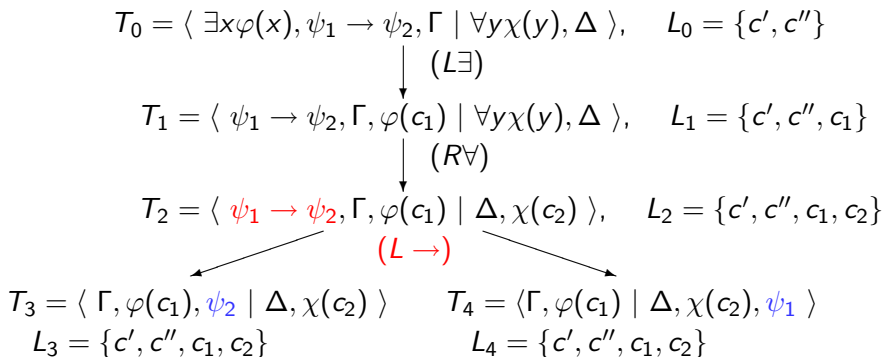
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$\begin{array}{ccc} T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_0 = \{c', c''\} & \\ \downarrow (L\exists) & & \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_1 = \{c', c'', c_1\} & \\ \downarrow (R\forall) & & \\ T_2 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \Delta, \chi(c_2) \rangle, & L_2 = \{c', c'', c_1, c_2\} & \end{array}$$

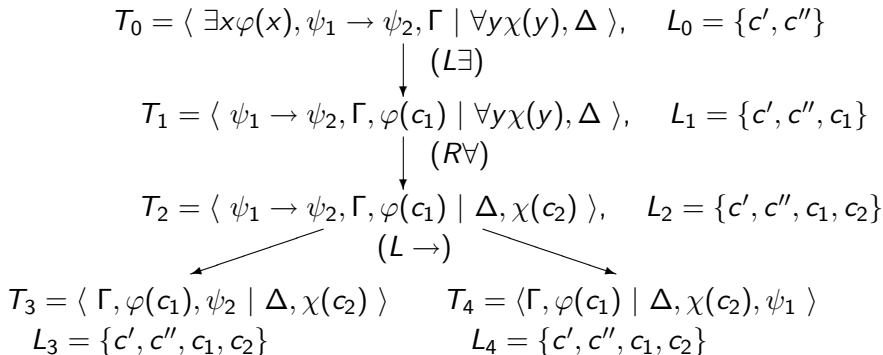
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$\downarrow$
 $(L\forall)$

$$T_1 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$\downarrow$
($L\forall$)

$$T_1 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$(L\forall)$

$$T_1 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

$(R\exists)$

$$T_2 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \Delta, \exists x \chi(x), \chi(c_1), \chi(c_2) \rangle,$$

$$L_2 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$(L\forall)$

$$T_1 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

$(R\exists)$

$$T_2 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \Delta, \exists x \chi(x), \chi(c_1), \chi(c_2) \rangle,$$

$$L_2 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x\varphi(x), \Gamma \mid \exists y\chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$(L\forall)$

$$T_1 = \langle \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y\chi(y), \Delta \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

$(R\exists)$

$$T_2 = \langle \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \Delta, \exists x\chi(x), \chi(c_1), \chi(c_2) \rangle,$$

$$L_2 = \{c_1, c_2\}$$

и. т. д.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Предположим, что указанная стратегия не приводит к построению успешного вывода для невыполнимой таблицы $T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$. Тогда в дереве вывода либо существует бесконечная ветвь, не содержащая закрытых таблиц

$$T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow T_n \longrightarrow T_{n+1} \longrightarrow \dots$$

либо существует ветвь, оканчивающаяся незакрытой атомарной таблицей

$$T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow T_{atom} \longrightarrow T_{atom} \longrightarrow T_{atom} \longrightarrow \dots$$

Будем полагать, что в последнем случае последовательность таблиц также бесконечна.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

На основе бесконечной последовательности незакрытых таблиц $T_0, T_1, \dots, T_n, T_{n+1}, \dots$, каждая из которых имеет вид $T_n = \langle \Gamma_n \mid \Delta_n \rangle$ построим три множества:

- 1). $\Gamma_\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$ множество всех формул из левых частей таблиц,
- 2). $\Delta_\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i$ множество всех формул из правых частей таблиц,
- 3). $L_\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_{T_i}$ множество всех констант из списков констант, ассоциированных с таблицами из бесконечной ветви.

Используя множества $\Gamma_\omega, \Delta_\omega, L_\omega$, построим интерпретацию I_ω , в которой будет выполняться каждая таблица последовательности.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

$$I_\omega = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Pred} \rangle$$

$$D_I = L_\omega$$

предметная область состоит из всех константных символов, входящих в состав формул из Γ_ω и Δ_ω ,

$$\overline{Const} : Const \rightarrow L_\omega$$

значением $\bar{c}$ каждой константы c (как символа из алфавита) является ее собственное изображение c (как элемент множества L_ω), т. е. $\bar{c} = c$,

$$\overline{Pred} : Pred \rightarrow (L_\omega^n \rightarrow \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\})$$

для каждого предикатного символа $P^{(n)}$ и набора элементов $c_{i_1}, \dots, c_{i_n}$ из L_ω

$$\overline{P}(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) = \mathbf{true} \iff P(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) \in \Gamma_\omega.$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Покажем, что

любая формула φ , $\varphi \in \Gamma_\omega$, **выполнима** в интерпретации I_ω ,

любая формула ψ , $\psi \in \Delta_\omega$, **невыполнима** в интерпретации I_ω .

Доказательство проведем при помощи индукции по числу логических операций (связок и кванторов) в формуле.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Базис индукции

φ, ψ — атомарные формулы.

Во всех таблицах T_i содержатся только замкнутые формулы (почему ?).

Поэтому формулы φ, ψ имеют вид $P(c_{i_1}, \dots, c_{i_n})$.

Если $\varphi \in \Gamma_\omega$, то $\overline{P}(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) = \mathbf{true}$, и поэтому $I_\omega \models \varphi$.

Если $\psi \in \Delta_\omega$, то $\psi \notin \Gamma_\omega$ (почему ?).

Значит, $\overline{P}(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) = \mathbf{false}$, и поэтому $I_\omega \not\models \psi$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Предположим, что утверждение верно для всех формул, имеющих не более n связок и кванторов. Рассмотрим формулы φ, ψ , содержащие $n + 1$ связку и квантор.

Если $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Gamma_\omega$, то есть такая таблица $T_i = \langle \Gamma_i | \Delta_i \rangle$, что $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Gamma_i$.

Согласно описанию применяемой стратегии построения табличного вывода, существует такая таблица $T_j = \langle \Gamma_j | \Delta_j \rangle$, $j \geq i$, что $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ — первая формула в списке формул Γ_j . Поэтому либо $\varphi_1 \in \Delta_{j+1}$, либо $\varphi_2 \in \Gamma_{j+1}$.

В первом случае, согласно индуктивному предположению, $I_\omega \not\models \varphi_1$, и поэтому $I_\omega \models \varphi$.

Во втором случае, согласно индуктивному предположению, $I_\omega \models \varphi_2$, и поэтому $I_\omega \models \varphi$.

Итак, в обоих случаях получаем $I_\omega \models \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Аналогичные рассуждения применимы и для других связок.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Если $\varphi = \forall x \varphi_1(x) \in \Gamma_\omega$, то формула $\forall x \varphi_1(x)$ бесконечно часто встречается в левых частях таблиц $T_i = \langle \Gamma_i | \Delta_i \rangle$ (почему ?).

Поэтому правило ($L\forall$) применяется к формуле $\forall x \varphi_1(x)$ бесконечно часто.

Тогда, согласно описанию применяемой стратегии построения табличного вывода, для любой константы c , $c \in L_\omega$, существует такая таблица $T_j = \langle \Gamma_j | \Delta_j \rangle$, что $\varphi_1(c) \in \Gamma_j$.

Значит, согласно индуктивному предположению, $I_\omega \models \varphi_1(c)$ для любой константы c , $c \in L_\omega$.

Так как $D_I = L_\omega$, приходим к заключению о том, что $I_\omega \models \forall x \varphi_1(x)$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Если $\varphi = \forall x \varphi_1(x) \in \Delta_\omega$, то есть такая таблица $T_i = \langle \Gamma_i | \Delta_i \rangle$, что $\forall x \varphi_1(x) \in \Delta_i$.

Согласно описанию применяемой стратегии построения табличного вывода, существует такая таблица $T_j = \langle \Gamma_j | \Delta_j \rangle$, $j \geq i$, что $\forall x \varphi_1(x)$ — первая формула в списке формул Δ_j .

Поэтому существует такая константа c , $c \in L_\omega$, что $\varphi_1(c) \in \Delta_{j+1}$.

Согласно индуктивному предположению, это означает, что $I_\omega \not\models \varphi_1(c)$, и поэтому $I_\omega \not\models \forall x \varphi_1(x)$.

Аналогичные рассуждения применимы и для формул с квантором $\exists$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВООДА

Таким образом,

любая формула φ , $\varphi \in \Gamma_\omega$, **выполнима** в интерпретации I_ω ,

любая формула ψ , $\psi \in \Delta_\omega$, **невыполнима** в интерпретации I_ω .

Поскольку, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_\omega$ и $\Delta_0 \subseteq \Delta_\omega$, приходим к заключению о том, что

$$I_\omega \models \Gamma_0, \quad I_\omega \not\models \Delta_0.$$

Это означает, что таблица T_0 выполнима в интерпретации I_ω вопреки условию о невыполнимости T_0 .

Источник полученного противоречия — предположение о невозможности построить успешный вывод, руководствуясь описанной стратегией. Значит, предложенная стратегия позволяет построить успешный вывод для всякой невыполнимой таблицы.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Это было упрощенное доказательство теоремы полноты. А насколько существенны те упрощения, которые были объявлены в начале доказательства? А именно,

- ▶ Какие изменения нужно внести в структуру данных, представляющих таблицы, чтобы доказательство можно было распространить и на таблицы, содержащие бесконечные множества формул?
- ▶ Какие изменения нужно внести в стратегию построения табличного вывода, чтобы построить успешный вывод для невыполнимой таблицы, формулы которой содержат сложные термы?
- ▶ Какие изменения нужно внести в определение интерпретации I_ω , чтобы доказательство можно было применить к таблицам, содержащим незамкнутые формулы?

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Теорема Геделя (о полноте)

Если формула φ общезначима, то существует успешный табличный вывод для таблицы $T_\varphi = \langle \emptyset | \varphi \rangle$.

Доказательство

Следует из теоремы полноты.

Итак, формула φ общезначима



для таблицы T_φ существует успешный вывод.

И в доказательстве теоремы полноты показано, **как** построить этот вывод.

ТЕОРЕМА ЛЕВЕНГЕЙМА-СКОЛЕМА

Теорема

Формула φ выполнима $\iff \varphi$ имеет модель с конечной или счетно-бесконечной предметной областью.

Доказательство

Если φ выполнима, то для таблицы $T_\varphi^* = \langle \varphi | \emptyset \rangle$ нельзя построить успешный вывод. Применим стратегию из доказательства теоремы полноты. Т. к. T_φ^* выполнима, получим дерево с ветвью, в которой нет закрытых таблиц.

$$T_\varphi^* = T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow T_n \longrightarrow T_{n+1} \longrightarrow \dots$$

Для этой ветви построим интерпретацию I_ω , в которой

- ▶ $D_i = L_\omega = \{c_1, c_2, \dots\}$ — конечное или счетно-бесконечное множество констант из таблиц последовательности;
- ▶ выполнимы все таблицы T_i (в т.ч. и T_φ^*).

ТЕОРЕМА КОМПАКТНОСТИ МАЛЬЦЕВА

Теорема

$\Gamma \models \varphi \iff$ существует такое конечное подмножество Γ' , $\Gamma' \subseteq \Gamma$, что $\Gamma' \models \varphi$.

Доказательство

1. $\Gamma \models \varphi \iff$ таблица $T = \langle \Gamma | \varphi \rangle$ невыполнима (почему?)
2. Таблица $T = \langle \Gamma | \varphi \rangle$ невыполнима $\iff$ существует успешный вывод для T (почему?)
3. успешный вывод — это конечное дерево, и поэтому существует лишь конечное множество формул Γ' , $\Gamma' \subseteq \Gamma$, к которым применяются правила вывода.
4. Но тогда для таблицы $T = \langle \Gamma' | \varphi \rangle$ существует точно такой же успешный вывод.
5. Значит, $\Gamma' \models \varphi$.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Стратегия построения табличного вывода, использованная в доказательстве **теоремы полноты** — это алгоритм построения доказательства истинности утверждений, выраженных формулами логики предикатов.

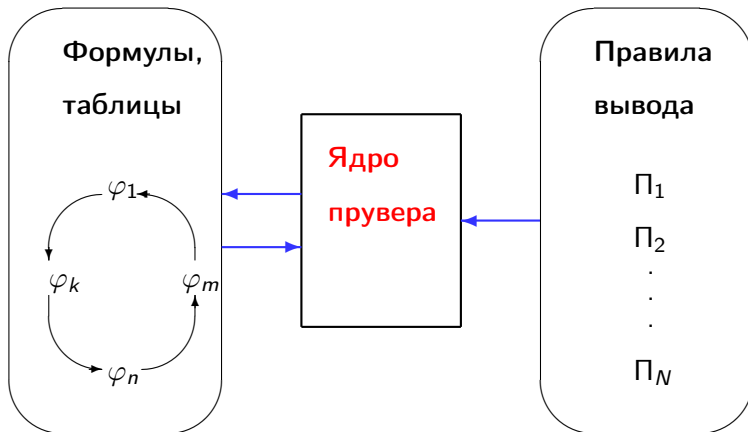
Автоматические системы построения доказательств (логических выводов) называются **пруверами**. От прuverов требуются следующие качества:

- ▶ **корректность** (абсолютно необходимо)
- ▶ **полнота** (очень-очень желательно)
- ▶ **эффективность** (желательно)

Первый прuver (крайне неэффективный) был разработан в 1957 в США (Newell, Simon, Shaw)

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Общая схема прувера



АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Наш прuver (табличный вывод) корректен и полон. Но насколько он эффективен?

В алгоритме построения дерева табличного вывода применяется двойной переборный поиск:

- ▶ **выбор формулы** , к которой нужно применить правило ввода,
- ▶ **выбор правила** , которое нужно применять к формуле.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Выбор формулы

Трудно избежать перебора всех формул таблицы.

База знаний	Запрос
В огороде бузина. Растет(бузина, огород)	В Киеве дядька. $\exists y(\text{Дядька}(y) \& \text{Живет}(y, \text{Киев}))$

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Выбор формулы

Трудно избежать перебора всех формул таблицы.

База знаний	Запрос
В огороде бузина. Растет(бузина, огород) Все в огороде посадил дядька. $\forall x(\text{Растет}(x, \text{огород}) \rightarrow$ $\exists y(\text{Посадил}(y, x) \& \text{Дядька}(y)))$;	В Киеве дядька. $\exists y(\text{Дядька}(y) \&$ $\text{Живет}(y, \text{Киев}))$

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Выбор формулы

Трудно избежать перебора всех формул таблицы.

База знаний	Запрос
В огороде бузина. Растет(бузина, огород)	В Киеве дядька. $\exists y(\text{Дядька}(y) \& \text{Живет}(y, \text{Киев}))$
Все в огороде посадил дядька. $\forall x(\text{Растет}(x, \text{огород}) \rightarrow \exists y(\text{Посадил}(y, x) \& \text{Дядька}(y)))$;	
Бузину посадил киевлянин. $\forall x(\text{Посадил}(x, \text{бузина}) \rightarrow \text{Живет}(x, \text{Киев}))$;	

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Наиболее критичный этап построения табличного вывода — выбор нужного правила. Это касается правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$.

$$L\forall \quad \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \mid \Delta \rangle}$$

$$R\exists \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \rangle}$$

поскольку выбор терма t правилами не оговаривается. Простой перебор всех термов практически невозможен. (почему ?)

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Потому что термов очень-очень много. Если есть один двухместный функциональный символ $f^{(2)}$ и две константы c_1, c_2 , то с их помощью можно построить более 10^{1000} основных термов высоты 10. Это количество значительно превосходит число наносекунд, прошедших с момента Большого Взрыва. Значит, нужно придумать способ, позволяющий быстро и точно вычислять тот терм, который нужно подставлять вместо переменных, связанных кванторами.

Эту задачу в 1964 г. сумели решить Дж. Робинсон (метод резолюций) и С. Маслов (обратный метод ε -термов).

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 5.